Метод наименьших квадратов без предположения о случайном характере остатков регрессии

В приведенных ниже задачах будут встречаться следующие обозначения:

$Y = X\beta + \varepsilon$ - линейная регрессия,

где $X = (I \quad X_1 \dots \quad X_k) \in \mathbb{R}^{k\times n}$, $Y, I, X_1, \dots, X_k \in R^{n\times 1}$, $I = (11\dots1)^T \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ - единичный вектор,

$P = X(X^T X)^{-1} X^T$ - матрица оператора проектирования на подпространство вектор - столбцов матрицы X,

$\widehat{Y} = PY$, $\widehat{\varepsilon} = Y - \widehat{Y}$,

$\pi = II^T / I^T I$ - матрица оператора проектирования на единичный вектор,

$TSS = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$ -сумма квадратов отклонений от среднего,

$ESS = \sum (\widehat{Y}_i - \overline{Y})^2$ - объясненная с помощью регрессии сумма квадратов отклонений от среднего,

$RSS = \sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i^2$ - сумма квадратов остатков регрессии.

1) Доказать, что если $a, b \in R^n$, то $\frac{d(a^T b)}{da} = b$, где $\frac{d}{da} = \left(\partial/\partial a_1, \dots, \partial/\partial a_n \right)^T$ [1]

2) Доказать, что если B – симметричная матрица, то $\frac{d(a^T Ba)}{da} = 2Ba.$ [2]

3) Показать, что для регрессии $Y = X\beta + \varepsilon$ задача минимизации суммы квадратов остатков регрессии по параметрам β сводится к решению системы нормальных уравнений

$X^T X\beta = X^T Y$.

4) Доказать, что если ранг матрицы X является максимальным, то система нормальных уравнений (см. задачу 3) имеет единственное решение.

5) Доказать, что если ранг матрицы X меньше максимального, то система нормальных уравнений (см. задачу 3) имеет бесконечное множество решений на всех решениях системы достигается минимум суммы квадратов остатков регрессии

6) Найти среди векторов $Y, I, X_1, \dots, X_k, \varepsilon, \widehat{Y}, \widehat{\varepsilon}$ пространства R^n пары ортогональных.

7) Как связаны векторы $\widehat{\varepsilon}$ и ε?

8) С помощью матриц P и π представить RSS, ESS, TSS в виде квадратичных форм вида $Y'AY$.

9) Показать, что если в матрице X линейной регрессии $Y = X\beta + \varepsilon$ есть единичный столбец в явном виде либо в виде линейной комбинации столбцов этой матрицы, то

а) $PI = I$, где $P = X(X^T X)^{-1} X^T$, I - единичный вектор

б) $\sum_{i=1}^{n} \widehat{\varepsilon}_i = 0$

в) $\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \widehat{Y}_i$

г) $\overline{Y} = \overline{\widehat{Y}}$

---

[1] О дифференцировании линейных функций (линейных форм) см. Магнус, Катышев, Пересецкий “Эконометрика”: раздел приложение ЛА

[2] О дифференцировании квадратичных форм см. Магнус, Катышев, Пересецкий “Эконометрика”: раздел приложение ЛА

д) $TSS = ESS + RSS$

10) Оценив с помощью метода наименьших квадратов линейную регрессию $Y = X\beta + \varepsilon$, получили вектор оцененных значений зависимой переменной $\widehat{Y}_1$.

Оценив линейную регрессию $Y = Za + \varepsilon$ с тем же зависимым вектором и матрицей факторов $Z = XH$, где H – ортогональная матрица, получили вектор оцененных значений зависимой переменной $\widehat{Y_2}$, равный

1) $\widehat{Y}_1$ 2) $H\widehat{Y}_1$ 3) $H^{'}\widehat{Y}_1$ 4) $\widehat{Y}_1 H$ 5) $H^{'}\widehat{Y}_1 H$